1.4. Phép tính toán tử Laplace và ứng dụng

1.4.1. Khái niệm hàm gốc, hàm ảnh

a) Các định nghĩa

Xét hàm số $x(t)$ xác định với mọi $t \in \mathbb{R}$ và có các tính chất sau:

1. Hàm $x(t)$ liên tục trên mọi khoảng hữu hạn (có thể có một số hữu hạn các điểm gián đoạn loại 1).
2. $x(t) = 0$ với mọi $t < 0$.
3. $\exists M > 0$ và $\alpha_0 \geq 0$ sao cho $|x(t)| < M.e^{\alpha_0 t}$ với mọi t.

Chú ý: Số α_0 nhỏ nhất thoả mãn điều kiện 3 được gọi là chỉ số tăng trưởng của hàm $x(t)$.

Hàm số $x(t)$ thoả mãn cả 3 điều kiện trên được gọi là hàm gốc.

Với mỗi gốc $x(t)$, ta đặt tương ứng với một hàm phức $X(s)$ xác định bởi hệ thức sau:

$$X(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}dt, \qquad (1.14)$$

với $Re(s) > \alpha_0$.

Hàm phức $X(s)$ xác định bởi công thức (1.14) được gọi là ***ảnh*** của hàm gốc $x(t)$ đã cho.

Giả sử gọi K là tập hợp các hàm gốc $x(t)$, N là tập hợp các hàm ảnh $X(s)$. Khi đó, hệ thức (1.14) xác định một ánh xạ từ K vào N, ánh xạ này được gọi là ánh xạ Laplace hay toán tử Laplace, ký hiệu là: $L\{x(t)\} = X(s)$ hay $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$.

b) Các định lý tồn tại và duy nhất

Định lý 1.7. (Định lý về sự tồn tại hàm ảnh)

Với mọi hàm gốc $x(t)$ luôn tồn tại hàm ảnh $X(s)$ xác định trên nửa mặt phẳng có $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0$.

Ngoài ra, trên nửa mặt phẳng này hàm $X(s)$ có đạo hàm mọi cấp và thỏa mãn $\lim\limits_{Re(s)\to\infty} X(s) = 0$.

Định lý 1.8. (Định lý về sự duy nhất gốc)

Nếu hàm $X(s)$ là ảnh của hai gốc $x_1(t)$ và $x_2(t)$ thì hai gốc đó trùng nhau tại mọi điểm mà nó liên tục.

c) Tính chất tuyến tính

$L\{a.x_1(t) + b.x_2(t)\} = a.L\{x_1(t)\} + b.L\{x_2(t)\}$

$= a.X_1(s) + b.X_2(s)$, với a, b là 2 hằng số.

Với a=1, b=-1, ta có: $L\{x_1(t) - x_2(t)\} = L\{x_1(t)\} - L\{x_2(t)\} = X_1(s) - X_2(s)$.

1.4.2. Một số hàm gốc cơ bản và ảnh của nó

a) Hàm đơn vị

$\sigma_0(t) = \begin{cases} 0 & nếu \quad t < 0 \\ 1 & nếu \quad t \geq 0 \end{cases}$, có ảnh $\sigma_0(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s}$, với Re(s)>0.

Quy ước:

Do các hàm gốc đều nhận giá trị 0 với $t < 0$, nên ta quy ước chỉ viết giá trị của hàm gốc ứng với $t \geq 0$. Như vậy, hàm đơn vị và ảnh của nó được viết là $1 \xrightarrow{L} \frac{1}{s}$.

Ví dụ 1.10.

$2 \xrightarrow{L} 2.\frac{1}{s} = \frac{2}{s}$; $\quad k \xrightarrow{L} \frac{k}{s}$, với k là hằng số.

b) Hàm mũ

$x(t) = e^{\alpha t}$, có ảnh : $e^{\alpha t} \xrightarrow{L} \frac{1}{s-\alpha}$, với $Re(s - \alpha) > 0$.

Suy ra, $x(t) = e^{-\alpha t} \xrightarrow{L} \frac{1}{s+\alpha}$, , với $Re(s + \alpha) > 0$.

Ví dụ 1.11.

$e^{3t} \xrightarrow{L} \frac{1}{s-3}$; $e^{-2t} \xrightarrow{L} \frac{1}{s+2}$

c) Hàm lượng giác

$x(t) = \sin\omega t \xrightarrow{L} \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$, với $Re(s) > |\omega|$.

$x(t) = \cos\omega t \xrightarrow{L} \frac{s}{s^2+\omega^2}$, với $Re(s) > |\omega|$.

Ví dụ 1.12.

$\sin 2t \xrightarrow{L} \frac{2}{s^2+4}$; $\quad \cos 3t \xrightarrow{L} \frac{s}{s^2+9}$

d) Hàm Hypebolic

$x(t) = \mathrm{sh}\omega t = \frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \xrightarrow{L} \frac{\omega}{s^2-\omega^2}$, với $Re(s) > |\omega|$.

$x(t) = \mathrm{ch}\omega t = \frac{1}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) \xrightarrow{L} \frac{s}{s^2-\omega^2}$, với $Re(s) > |\omega|$.

Ví dụ 1.13.

$\mathrm{sh}2t \xrightarrow{L} \frac{2}{s^2-4}$; $\quad \mathrm{ch}3t \xrightarrow{L} \frac{s}{s^2-9}$

e) Hàm lũy thừa

$x(t) = t^n \xrightarrow{L} \frac{n!}{s^{n+1}}$, với $Re(s) > 0$.

Ví dụ 1.14.

$t^3 \xrightarrow{L} \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$.

g) Hàm Dirac

Hàm xung đơn vị dạng $\delta_h(t) = \begin{cases} 0 & nếu \quad t \notin [0,h] \\ \frac{1}{h} & nếu \quad t \in [0,h] \end{cases}$,

$$\frac{1}{sh} \xrightarrow{L} (1 - e^{-sh}).$$

Nhận xét:

Hàm xung đơn vị như một lực có độ lớn bằng $\frac{1}{h}$, tác dụng trong suốt khoảng thời gian h thì xung lượng của nó luôn bằng đơn vị $\int_0^{+\infty} \delta_h(t)dt = 1$.

Hàm Dirac được định nghĩa là $\delta(t) = \lim_{h\to 0} \delta_h(t) \xrightarrow{L} 1$.

Hàm Dirac như một lực có độ lớn vô hạn tại thời điểm $t = 0$ và bằng 0 tại mọi thời điểm khác thì xung lượng của lực đó vẫn bằng đơn vị.

1.4.3. Các định lý cơ bản

Định lý 1.9. (Định lý đồng dạng)

Nếu $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ thì $x(\alpha t) \xrightarrow{L} \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{s}{\alpha}\right)$.

Định lý 1.10. (Định lý dịch chuyển ảnh)

Nếu $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ thì $e^{-\alpha t}x(t) \xrightarrow{L} X(s + \alpha)$, với $Re(s + \alpha) > \alpha_0$ và $\forall\alpha$.

Ví dụ 1.15. $e^{-2t}.t^3 \xrightarrow{L} \frac{n!}{(s+2)^{n+1}}$; $e^{3t}.\sin 2t \xrightarrow{L} \frac{2}{(s-3)^2+4} = \frac{2}{s^2-6s+13}$.

Định lý 1.11. (Định lý trễ)

Giả sử $\tau > 0$ và $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ thì $x(t - \tau) \xrightarrow{L} e^{-p\tau}. X(s)$.

Ví dụ 1.16.

$$x(t) = \begin{cases} 0 & nếu \quad t \notin [1,4] \\ 1 & nếu \quad t \in [1,4] \end{cases} = \sigma_0(t-1) - \sigma_0(t-4) \xrightarrow{L} \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s}.$$

1.4.4. Vi, tích phân gốc

a) Vi phân hàm gốc

Định lý 1.12.

Nếu $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ và nếu $x'(t)$ cũng là gốc thì $x'(t) \xrightarrow{L} s\,X(s) - x(0)$.

Nhận xét:

Áp dụng định lý 1.12 sau n lần (nếu được) ta có kết quả sau :

$x^{(n)}(t) \xrightarrow{L} s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - ... - sx^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)$.

Đặc biệt, nếu có $x'(0) = x''(0) = ... = x^{(n-1)}(0) = 0$ thì ta có $x^{(n)}(t) \xrightarrow{L} s^n X(s)$.

Ngoài ra, ta có công thức thường dùng là $x''(t) \xrightarrow{L} s^2 X(s) - sx(0) - x'(0)$.

Chú ý:

Do có $\lim_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} X(s) = 0$ nên ta có $x(0) = \lim_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} sX(s)$, công thức này cho phép ta tính giá trị ban đầu của hàm gốc khi biết ảnh của nó mà không cần phải xác định bản thân hàm gốc đó.

Ví dụ 1.17.

Ta có, $x(t) = e^{-t} \xrightarrow{L} \frac{1}{s+1}$, nên suy ra được các kết quả sau đây

$x'(t) = -e^{-t} \xrightarrow{L} \frac{s}{s+1} - 1 = -\frac{1}{s+1}$.

$x''(t) = e^{-t} \xrightarrow{L} \frac{s^2}{s+1} - s + 1 = \frac{1}{s+1}$ ...

b) Tích phân hàm gốc

Định lý 1.13.

Nếu $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ và nếu $\int_0^t x(u)du$ cũng là một gốc thì ta có $\int_0^t x(u)du \xrightarrow{L} \frac{X(s)}{s}$.

Ví dụ 1.18.

Ta có, $\cos 2t \xrightarrow{L} \frac{s}{s^2+4} \Rightarrow \int_0^t cos2xdx = \frac{1}{s^2+4}$.

1.4.5. Bảng cơ bản các gốc và ảnh của nó

Chú ý: Sử dụng bảng này ta có thể tìm ảnh khi biết gốc và ngược lại ta tìm hàm gốc khi biết ảnh của chúng bằng cách ta phân tích hàm ảnh theo các hàm ảnh cơ bản đã có trong bảng trên.

Ví dụ 1.19. Tìm ảnh của gốc $x(t) = (t + 2)^2$.

Ta có, $x(t) = (t + 2)^2 = t^2 + 4t + 4 \xrightarrow{L} X(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}$.

Ví dụ 1.20. Tìm gốc có ảnh là $X(s) = \frac{s}{s^2-3s+2}$.

Ta có, $X(s) = \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-1} \xleftarrow{L} x(t) = 2e^{2t} - e^t$.

1.4.6. Ứng dụng toán tử Laplace giải phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Xét phương trình vi phân cấp 2 có hệ số hằng dạng

$x''(t) + a_1x'(t) + a_2x(t) = f(t)$, (*) trong đó a_1, a_2 là 2 hằng số.

Ta cần tìm nghiệm $x = x(t)$ của phương trình (*) thỏa mãn các điều kiện đầu sau đây $x(0) = x_0$ và $x'(0) = x'_0$.

Giả thiết nghiệm cần tìm $y(t)$ cùng các đạo hàm của nó và hàm $f(t)$ đều là các hàm gốc. Giả sử $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$, $f(t) \xrightarrow{L} F(s)$ ta được $x'(t) \xrightarrow{L} sX(s) - x_0$ và $x''(t) \xrightarrow{L} s^2X(s) - sx_0 - x'_0$. Khi đó, phương trình ảnh của phương trình (*):

$s^2X(s) - sx_0 - x'_0 + a_1(sX(s) - x_0) + a_2X(s) = F(s)$

$\Leftrightarrow (s^2 + a_1 s + a_2)X(s) = F(s) + (s + a_1)y_0 + y'_0$.

$\Leftrightarrow X(s) = \frac{F(s)+(s+a_1)x_0+x_0'}{s^2+a_1s+a_2}$, (**)

Hàm $X(s)$ xác định bởi công thức (**) được gọi là nghiệm toán tử của phương trình vi phân (*) và hiển nhiên hàm gốc tương ứng với nó là nghiệm của phương trình vi phân mà ta cần tìm.

Ví dụ 1.21. Giải phương trình $x'' - x = \cos 3t + 1$, thỏa mãn $x_0 = x'_0 = 0$.

Giải:

Ta có, $\cos 3t + 1 \xrightarrow{L} \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{s}$.

Giả sử nghiệm cần tìm là $x = x(t) \xrightarrow{L} X(s) \Rightarrow x'' \xrightarrow{L} s^2X(s)$. Khi đó, ta có phương trình ảnh tương ứng với phương trình đã cho có dạng:

$s^2X(s) - X(s) = \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{s}$

$\Leftrightarrow (s^2 - 1)X(s) = \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{s}$

$\Leftrightarrow X(s) = \frac{s}{(s^2+9)(s^2-1)} + \frac{1}{s(s^2-1)}$.

$\Leftrightarrow X(s) = \frac{11}{10}\frac{s}{s^2-1} - \frac{1}{10}\frac{s}{s^2+9} - \frac{1}{s} \xleftarrow{L} x(t) = \frac{11}{10}\text{ch}t - \frac{1}{10}.\cos 3t - 1.$

Vậy, nghiệm cần tìm là $x = \frac{11}{10}.\text{ch}t - \frac{1}{10}.\cos 3t - 1$.

Nhận xét:

Rõ ràng việc vận dụng phép tính toán tử Laplace vào giải các bài toán về phương trình vi phân hệ số hằng trở lên đơn giản hơn rất nhiều. Bởi ta đã chuyển từ việc giải phương trình vi phân cấp cao về việc giải phương trình đại số bậc nhất đối với hàm chưa biết cần phải tìm là $X(s)$.

BẢNG

Gốc và ảnh của một số hàm phức cơ bản

STT	Gốc $x(t)$	Ảnh $X(s)$	STT	Gốc $x(t)$	Ảnh $X(s)$
1	$\sigma_0(t) = 1$	$\frac{1}{s}$	11	$e^{-\alpha t}t^n$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	12	$e^{\alpha t}t^n$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
3	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$	13	$t.sin\omega t$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$
4	$sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	14	$t.cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
5	$cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	15	$x(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha}X\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
6	$sh\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	16	$e^{-\alpha t}x(t)$	$X(s+\alpha)$
7	$ch\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	17	$x'(t)$ $x''(t)$	$sX(s) - x(0)$ $s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$
8	$e^{-\alpha t}sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	18	$\int_o^t x(u)du$	$\frac{X(s)}{s}$
9	$e^{-\alpha t}cos\omega t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	19	$\delta(t)$	1
10	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	20	$x(t - \tau)$	$e^{-p\tau}.X(s)$